

## МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 27.11.2025

## ЮНИОРЫ, ВЫСШАЯ ЛИГА

1. В вершинах графа расставлены целые числа. Каждую минуту выбирается произвольное ребро, числа на концах которого отличаются хотя бы на 2, и из большего числа вычитается 1. Процесс продолжается, пока хотя бы одно такое ребро существует. Докажите, что процесс рано или поздно остановится, и что число в любой вершине в конце процесса не зависит от порядка действий.

2. Назовем перестановку чисел  $\{1, 2, 3, \dots, 2025\}$  *волшебной*, если для любого  $k$  есть хотя бы  $\lfloor \frac{k}{2} \rfloor$  чисел меньше его, стоящих левее. Сколько существует волшебных перестановок?

3. Пусть  $ABC$  — равнобедренный треугольник с основанием  $BC$ , и пусть  $D$  — середина стороны  $AC$ , а  $\Gamma$  — описанная окружность треугольника  $ABD$ . Касательная к  $\Gamma$  в точке  $A$  пересекает прямую  $BC$  в точке  $E$ . Пусть  $O$  — центр описанной окружности треугольника  $ABE$ . Докажите, что середина отрезка  $AO$  лежит на  $\Gamma$ .

4. В треугольнике  $ABC$  точки  $O$  и  $H$  — центр описанной окружности и точка пересечения высот соответственно. Касательные в точках  $B$  и  $C$  к описанной окружности треугольника  $ABC$  пересекают прямые  $AC$  и  $AB$  в точках  $E$  и  $F$  соответственно. Прямые  $BO$  и  $CH$  пересекаются в точке  $P$ , а прямые  $CO$  и  $BH$  пересекаются в точке  $Q$ . Оказалось, что  $EF \perp BC$ . Докажите, что  $OP = OQ$ .

5. Докажите, что  $\left\lceil \sqrt{2} \left[ \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)n + \frac{1}{2} \right] \right\rceil = \lceil (1 + \sqrt{2})n \rceil$  при всех натуральных  $n$ .

6. Докажите неравенство

$$\frac{a^2 + b}{a^2 + ab + b^2} + \frac{b^2 + c}{b^2 + bc + c^2} + \frac{c^2 + a}{c^2 + ca + a^2} \geq 2$$

при всех положительных  $a, b, c$ , удовлетворяющих условию  $a + b + c \geq ab + bc + ac$ .

7. Натуральные числа  $m, n > 1$  взаимно просты. Докажите, что числа  $\frac{n^4 + m}{m^2 + n^2}$  и  $\frac{n^4 - m}{m^2 - n^2}$  не могут быть целыми одновременно.

8. С трёхчленом  $ax^2 + bx + c$  разрешено проделывать следующие операции:

(i) Если  $c \neq 0$ , заменить  $a$  на  $4a - \frac{3}{c}$ , а  $c$  на  $\frac{c}{4}$ .

(ii) Если  $a \neq 0$ , заменить  $a$  на  $-\frac{a}{2}$ , а  $c$  на  $-2c + \frac{3}{a}$ .

(iii) Заменить  $x$  на  $x - t$  с любым целым  $t$ . (Число  $t$  при каждой операции можно выбирать заново.) Можно ли такими операциями получить из трёхчлена  $x^2 - x - 6$  трёхчлен  $x^2 + 6x + 2$ ?

9. В музее есть  $4n - 2$  монеты. Все они весят одинаково, за исключением одной фальшивой — она легче остальных. В городе живут  $n$  сертифицированных экспертов. Каждому из них утром можно принести две группы из равного количества монет, чтобы он их взвесил (одну и ту же монету нельзя принести нескольким экспертам в один и тот же день). Вечером эксперт сообщает своё заключение: либо указывает, какая группа монет легче, либо говорит, что они весят одинаково. Проблема в том, что один из экспертов — лжец (он взвешивает то, что ему дали, но сообщает любой из двух неверных результатов). Как найти фальшивую монету за два дня?

10. Назовём *мегакрестом* клетчатый квадрат (назовем его *центральный*), к сторонам которого приложены ещё 4 таких же квадрата так, что вместе они образуют фигуру в форме креста. На бесконечной белой клетчатой плоскости выбрали несколько мегакрестов (возможно, разного размера), все их клетки покрасили в синий цвет. Все клетки плоскости, покрытые хотя бы одним центральным квадратом назовем *красивыми*. Докажите, что синих клеток не более чем в пять раз больше, чем красивых.

## МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 27.11.2025

## ЮНИОРЫ, ПЕРВАЯ ЛИГА

1. В вершинах графа расставлены целые числа. Каждую минуту выбирается произвольное ребро, числа на концах которого отличаются хотя бы на 2, и из большего числа вычитается 1. Процесс продолжается, пока хотя бы одно такое ребро существует. Докажите, что процесс рано или поздно остановится, и что число в любой вершине в конце процесса не зависит от порядка действий.

2. Назовем перестановку чисел  $\{1, 2, 3, \dots, 2025\}$  *волшебной*, если для любого  $k$  есть хотя бы  $\lfloor \frac{k}{2} \rfloor$  чисел меньше его, стоящих левее. Сколько существует волшебных перестановок?

3. Пусть  $ABC$  — равнобедренный треугольник с основанием  $BC$ , и пусть  $D$  — середина стороны  $AC$ , а  $\Gamma$  — описанная окружность треугольника  $ABD$ . Касательная к  $\Gamma$  в точке  $A$  пересекает прямую  $BC$  в точке  $E$ . Пусть  $O$  — центр описанной окружности треугольника  $ABE$ . Докажите, что середина отрезка  $AO$  лежит на  $\Gamma$ .

4. В треугольнике  $ABC$  точка  $M$  — середина  $AB$ , а точка  $D$  на стороне  $BC$  такова, что  $BD = 2CD$  и  $AD = 2DM$ . Найдите  $\angle ACB$ .

5. Докажите, что существует бесконечное количество четверок натуральных чисел  $(a, b, c, d)$ , таких что  $ab + 1$ ,  $bc + 16$ ,  $cd + 4$  и  $da + 9$  — точные квадраты.

6. Докажите неравенство

$$\frac{a^2 + b}{a^2 + ab + b^2} + \frac{b^2 + c}{b^2 + bc + c^2} + \frac{c^2 + a}{c^2 + ca + a^2} \geq 2$$

при всех положительных  $a, b, c$ , удовлетворяющих условию  $a + b + c \geq ab + bc + ac$ .

7. Натуральные числа  $m, n > 1$  взаимно просты. Докажите, что числа  $\frac{n^4 + m}{m^2 + n^2}$  и  $\frac{n^4 - m}{m^2 - n^2}$  не могут быть целыми одновременно.

8. С трёхчленом  $ax^2 + bx + c$  разрешено проделывать следующие операции:

(i) Если  $c \neq 0$ , заменить  $a$  на  $4a - \frac{3}{c}$ , а  $c$  на  $\frac{c}{4}$ .

(ii) Если  $a \neq 0$ , заменить  $a$  на  $-\frac{a}{2}$ , а  $c$  на  $-2c + \frac{3}{a}$ .

(iii) Заменить  $x$  на  $x - t$  с любым целым  $t$ . (Число  $t$  при каждой операции можно выбирать заново.) Можно ли такими операциями получить из трёхчлена  $x^2 - x - 6$  трёхчлен  $x^2 + 6x + 2$ ?

9. В музее есть  $4n - 2$  монеты. Все они весят одинаково, за исключением одной фальшивой — она легче остальных. В городе живут  $n$  сертифицированных экспертов. Каждому из них утром можно принести две группы из равного количества монет, чтобы он их взвесил (одну и ту же монету нельзя принести нескольким экспертам в один и тот же день). Вечером эксперт сообщает своё заключение: либо указывает, какая группа монет легче, либо говорит, что они весят одинаково. Проблема в том, что один из экспертов — лжец (он взвешивает то, что ему дали, но сообщает любой из двух неверных результатов). Как найти фальшивую монету за два дня?

10. Назовём *мегакрестом* клетчатый квадрат (назовем его *центральный*), к сторонам которого приложены ещё 4 таких же квадрата так, что вместе они образуют фигуру в форме креста. На бесконечной белой клетчатой плоскости выбрали несколько мегакрестов (возможно, разного размера), все их клетки покрасили в синий цвет. Все клетки плоскости, покрытые хотя бы одним центральным квадратом назовем *красивыми*. Докажите, что синих клеток не более чем в пять раз больше, чем красивых.

## МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 27.11.2025

## ЮНИОРЫ, ВТОРАЯ ЛИГА

1. В физматшколе 120 учеников. Среди них очень популярны 10 Telegram-каналов по комбинаторике: у каждого канала в школе не менее 85 подписчиков! Докажите, что Александр Сергеевич, у которого нет Telegram, может выбрать двух школьников и узнать у них всё, что пишут в этих каналах (потому что на каждый канал подписан хотя бы один из них).

2. Назовем перестановку чисел  $\{1, 2, 3, \dots, 2025\}$  *волшебной*, если для любого  $k$  есть хотя бы  $\lfloor \frac{k}{2} \rfloor$  чисел меньше его, стоящих левее. Сколько существует волшебных перестановок?

3. Пусть  $ABC$  — равнобедренный треугольник с основанием  $BC$ , и пусть  $D$  — середина стороны  $AC$ , а  $\Gamma$  — описанная окружность треугольника  $ABD$ . Касательная к  $\Gamma$  в точке  $A$  пересекает прямую  $BC$  в точке  $E$ . Пусть  $O$  — центр описанной окружности треугольника  $ABE$ . Докажите, что середина отрезка  $AO$  лежит на  $\Gamma$ .

4. В треугольнике  $ABC$  точка  $M$  — середина  $AB$ , а точка  $D$  на стороне  $BC$  такова, что  $BD = 2CD$  и  $AD = 2DM$ . Найдите  $\angle ACB$ .

5. Назовём два натуральных числа *2999-похожими*, если из них можно вычеркиванием цифр получить одно и то же натуральное число, делящееся на 2999. Верно ли, что для любого натурального  $k$  существуют  $k$  натуральных чисел, делящихся на 2999, любые два из которых не являются 2999-похожими?

6. Положительные числа  $a, b, c$  удовлетворяют условию  $a + b + c = ab + bc + ac$ . Какие значения может принимать выражение

$$\frac{a^2 + b}{a^2 + ab + b^2} + \frac{b^2 + c}{b^2 + bc + c^2} + \frac{c^2 + a}{c^2 + ca + a^2}?$$

7. Натуральные числа  $m, n > 1$  взаимно просты. Докажите, что числа  $\frac{n^4 + m}{m^2 + n^2}$  и  $\frac{n^4 - m}{m^2 - n^2}$  не могут быть целыми одновременно.

8. С трёхчленом  $ax^2 + bx + c$  разрешено проделывать следующие операции:

(i) Если  $c \neq 0$ , заменить  $a$  на  $4a - \frac{3}{c}$ , а  $c$  на  $\frac{c}{4}$ .

(ii) Если  $a \neq 0$ , заменить  $a$  на  $-\frac{a}{2}$ , а  $c$  на  $-2c + \frac{3}{a}$ .

(iii) Заменить  $x$  на  $x - t$  с любым целым  $t$ . (Число  $t$  при каждой операции можно выбирать заново.) Можно ли такими операциями получить из трёхчлена  $x^2 - x - 6$  трёхчлен  $5x^2 + 5x - 1$ ?

9. В музее есть  $4n - 2$  монеты. Все они весят одинаково, за исключением одной фальшивой — она легче остальных. В городе живут  $n$  сертифицированных экспертов. Каждому из них утром можно принести две группы из равного количества монет, чтобы он их взвесил (одну и ту же монету нельзя принести нескольким экспертам в один и тот же день). Вечером эксперт сообщает своё заключение: либо указывает, какая группа монет легче, либо говорит, что они весят одинаково. Проблема в том, что один из экспертов — лжец (он взвешивает то, что ему дали, но сообщает любой из двух неверных результатов). Как найти фальшивую монету за два дня?

10. Назовём *мегакрестом* клетчатый квадрат (назовем его *центральный*), к сторонам которого приложены ещё 4 таких же квадрата так, что вместе они образуют фигуру в форме креста. На бесконечной белой клетчатой плоскости выбрали несколько мегакрестов (возможно, разного размера), все их клетки покрасили в синий цвет. Все клетки плоскости, покрытые хотя бы одним центральным квадратом назовем *красивыми*. Докажите, что синих клеток не более чем в пять раз больше, чем красивых.